

主張

a, b が (互いに割り切れない) 整数のとき、 $\log_a b$ は、どのような2つの整数の比とも一致しない。

たとえば 「 $\log_2 3$ は $\frac{73}{125}$ に等しい」 などということは決しておきない。

定理

a, b を互いに素な自然数とし、 \mathbb{Q} を有理数全体の集合とするとき

$$\log_a b \notin \mathbb{Q}$$

である

証明

証明は背理法による。

$$\log_a b = i / j$$

となる自然数 i, j が存在したとする。

$$b = a^{i/j}$$

両辺を j 乗して

$$b^j = a^i$$

この等式は、 a, b が互いに素な自然数であることに反する。QED